inner surface, r_2 = radius of the outer surface) in a homogeneous external magnetic field parallel to the axis of the cylinder. The electric current flows on circles in planes perpendicular to the axis of the cylinder. With r as the radius of such a circle we obtain from Eq. (9 b)

$$2\,\pi\, r\, \Lambda\, c\, j^{(1)}(r) = n\,\Phi_0 - \pi\, r^2 H_{\text{ext}}\,. \tag{11}$$

This solution also satisfies Eqs. (9 a) and (9 c). Calculation of F according to Eq. (10) shows that the special choice, n, for the fluxoid quantum number will lead to minimum free energy if

$$(n-\tfrac{1}{2})\,\Phi_0 < \pi\,\bar{r}^2 H_{\text{ext}} < (n+\tfrac{1}{2})\,\Phi_0\,. \tag{12}$$

At the bounds of this inequality the actual value of n will jump rather discontinuously by one unit. The radius, $\bar{r}$, in Eq. (12) is defined by

$$\bar{r}^2 = (r_2{}^2 - r_1{}^2)/2 \ln (r_2/r_1)\,; \tag{13}$$

it is easily shown that

$$r_1 \leq \bar{r} \leq r_2\,. \tag{14}$$

If the cylinder is tilted with respect to the direction of the external field by an angle α the quantity H_{ext} in Eq. (12) has to be replaced by $H_{\text{ext}} \cos \alpha$.

The author would like to acknowledge a clarifying discussion with F. Hund.

Zur Quantisierung des magnetischen Flusses in supraleitenden Zylindern

Von Wolfgang Weller

Institut für theoretische Physik der Universität Leipzig

(Z. Naturforschg. **17 a**, 182—183 [1962]; eingegangen am 29. Januar 1962)

Die Quantisierung des magnetischen Flusses in einem supraleitenden Hohlzylinder wird im Rahmen der phänomenologischen Theorie von Ginsburg und Landau diskutiert.

Kürzlich wurde von Deaver und Fairbank [1] und von Doll und Näbauer [2] über Eperimente berichtet, bei denen der eingefrorene magnetische Fluß gemessen wurde, der von einem supraleitenden Hohlzylinder umschlossen wird. Die Experimente ergaben, daß der Fluß in ganzzahligen Vielfachen von $h\,c/2\,e$ quantisiert ist. Diese Erscheinung ist schon von London vorausgesagt worden, jedoch sollte die Einheit des Flusses $h\,c/e$ sein. Das Problem liegt im Auftreten der doppelten Elementarladung $2\,e$. Byers und Yang [3], Onsager [4] und Blatt [5] bringen die Verdopplung der Elementarladung mit der Interpretation der Supraleitung als Bose-Kondensation von Elektronenpaaren in Verbindung.

Hier soll die Quantisierung des magnetischen Flusses auf Grund der phänomenologischen Theorie von Ginsburg und Landau [6] untersucht werden. Das ist deshalb von Interesse, da Gorkov [7] diese phänomenologischen Gleichungen aus einer mikroskopischen Theorie vom Typ der von Bardeen, Cooper und Schrieffer [8] diskutierten abgeleitet hat. Die Ableitung ergibt, daß in den phänomenologischen Gleichungen die doppelte Elementarladung $e^* = 2\,e$ an die Stelle der von Ginsburg und Landau [6] ursprünglich vorgeschlagenen einfachen Elementarladung tritt. Der physikalische Grund dafür ist offensichtlich in der Bose-Kondensation von Elektronenpaaren bei der Supraleitung zu finden.

Die phänomenologische Theorie von Ginsburg und Landau wird durch die Gleichungen [6, 7]

$$\frac{1}{2\,m}\left(-i\,\hbar\,\text{grad} - \frac{e^*}{c}\,\mathfrak{A}\right)^2 \Psi(\mathfrak{r}) + \frac{\partial F_{\text{so}}(|\Psi|^2)}{\partial \Psi^*} = 0\,, \tag{1}$$

$$\text{rot rot}\,\mathfrak{A} = \frac{4\,\pi}{c}\,\mathfrak{i}\,, \tag{2}$$

$$\mathfrak{i} = -\frac{i\,e^*\,\hbar}{2\,m}\,(\Psi^*\,\text{grad}\,\Psi - \Psi\,\text{grad}\,\Psi^*) - \frac{e^{*2}}{2\,m}\,\mathfrak{A}\,\Psi^*\,\Psi \tag{3}$$

und durch eine Grenzbedingung gegeben, nach der die Normalkomponente des Stromes an der Oberfläche des Supraleiters verschwindet. $\Psi(\mathfrak{r})$ ist die Quasiwellenfunktion der supraleitenden Elektronen; $|\Psi|^2$ wird als Dichte der supraleitenden Elektronen interpretiert. F_{so} ist die freie Energie des Supraleiters ohne Magnetfeld. Ginsburg und Landau geben für F_{so} eine Entwicklung für kleine $|\Psi|^2$ an, die also in der Nähe der Sprungtemperatur gültig ist. Die Theorie wurde von Bardeen [9] auf niedrigere Temperaturen verallgemeinert. Wir müssen uns hier auf die Umgebung der Sprungtemperatur beschränken, da die Ableitung von Gorkov von nur dort gültigen Näherungen Gebrauch macht. Der Zusammenhang mit der mikroskopischen Theorie zeigt, daß $\Psi(\mathfrak{r})$ bis auf räumlich konstante Faktoren gegeben wird durch [7]

$$\Psi(\mathfrak{r}) \propto \langle \psi(\mathfrak{r})\,\psi(\mathfrak{r})\rangle\,. \tag{4}$$

Dabei ist $\psi(\mathfrak{r})$ das quantisierte Elektronenfeld, und die Mittelung erfolgt über die große kanonische Gesamtheit.

Die Quantisierung des magnetischen Flusses folgt in elementarer Weise aus der Tatsache, daß für die Quasiwellenfunktion Ψ die übliche quantenmechanische Beziehung (3) für den Strom gilt. Wir betrachten die Gln. (2) und (3) in dem Gebiet des supraleitenden

[1] B. S. Deaver u. W. M. Fairbank, Phys. Rev. Letters **7**, 43 [1961].
[2] R. Doll u. M. Näbauer, Phys. Rev. Letters **7**, 51 [1961].
[3] N. Byers u. C. N. Yang, Phys. Rev. Letters **7**, 46 [1961].
[4] L. Onsager, Phys. Rev. Letters **7**, 50 [1961].
[5] J. M. Blatt, Phys. Rev. Letters **7**, 82 [1961].
[6] W. L. Ginsburg u. L. D. Landau, J. exp. theor. Phys. **20**, 1064 [1950].
[7] L. P. Gorkov, J. exp. theor. Phys. **36**, 1918 [1959].
[8] J. Bardeen, L. N. Cooper u. J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 [1957].
[9] J. Bardeen, Phys. Rev. **94**, 554 [1954].

Hohlzylinders, in dem $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{i}$ auf Null abgeklungen sind. Wir benutzen die üblichen Zylinderkoordinaten r, φ, z. Die Rotationssymmetrie um die z-Achse und die Homogenität längs dieser Achse für einen unendlich langen Kreiszylinder bewirken, daß $\mathfrak{A}$ und die Dichte $|\Psi|^2$ der supraleitenden Elektronen nur von r abhängen. Gl. (2) hat im betrachteten Gebiet ($\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{i}=0$), wenn wir noch $\operatorname{div} \mathfrak{A}=0$ fordern, die Lösung

$$A_r=0\,, \qquad A_\varphi=a/r\,, \qquad A_z=b \tag{5}$$

mit konstanten a und b. Für Ψ machen wir den Ansatz

$$\Psi(\mathfrak{r})=\exp[i\,\gamma(\varphi,z)]\,f(r)\,. \tag{6}$$

Für das betrachtete Gebiet ($\mathfrak{i}=0$) liefern dann die Gln. (3) und (5)

$$\Psi(\mathfrak{r})=\exp\left[\frac{i\,e^*}{\hbar\,c}\,(a\,\varphi+b\,z)\right]f(r)\,. \tag{7}$$

Aus der Bedeutung von Ψ nach Gl. (4) folgt, daß Ψ eine eindeutige Funktion des Ortes sein muß. Wir bekommen somit

$$e^*\,a/(\hbar\,c)=n\,, \qquad n \text{ ganze Zahl.} \tag{8}$$

Die Berechnung des vom supraleitenden Hohlzylinder umschlossenen magnetischen Flusses Φ liefert dann mit den Gln. (5) und (8)

$$\Phi=\oint \mathfrak{A}\,d\mathfrak{r}=2\,\pi\,a=\frac{h\,c}{e^*}\,n$$

in Übereinstimmung mit den Experimenten.

Anm. b. d. Korr.: Inzwischen wurden mir Notizen von J. BARDEEN, Phys. Rev. Letters **7**, 162 [1961] und von J. B. KELLER u. B. ZUMINO, Phys. Rev. Letters **7**, 164 [1961] zugänglich, die in ähnlicher Weise die Quantisierung des magnetischen Flusses im Rahmen der Theorie von GINSBURG, LANDAU und GORKOV diskutieren.

Beeinflussung der Spaltstruktur von NaCl-Kristallen durch Inhomogenitäten [1]

Von H. BETHGE und V. SCHMIDT

Arbeitsstelle für Elektronenmikroskopie der Dtsch. Akad. d. Wiss., Halle/S., Am Weinberg 2, und Institut für experimentelle Physik der Universität Halle (Saale)

(Z. Naturforschg. **17 a**, 183—185 [1962]; eingeg. am 27. Dezember 1961)

Während die plastischen Eigenschaften der Kristalle durch die Versetzungstheorie in den wesentlichen Zügen geklärt sind, bleiben zum Thema „Bruch kristalliner Körper“ noch viele Fragen offen. Die Ursache hierfür liegt im sehr komplexen Mechanismus des Bruchvorganges, vor allem durch die Beteiligung der beim Bruch ausgelösten plastischen Vorgänge. In Arbeiten der letzten Jahre sind besonders Prozesse diskutiert worden, die im Zusammenhang mit der Bruchausbreitung auftreten und für die Energiebilanz von Einfluß sind. Erwähnt seien die an LiF von GILMAN [2] durchgeführten Untersuchungen, in denen in Abhängigkeit von der Rißgeschwindigkeit die gebildeten Versetzungen bestimmt wurden. Die Beobachtung der Versetzungen auf der Spaltfläche erfolgte lichtmikroskopisch nach geeigneter Anätzung. Von theoretischer Seite ist in neueren Arbeiten die Wechselwirkung von Bruch und Versetzungen diskutiert worden [3].

Da Inhomogenitäten im Kristall örtlich sicher die Rißausbreitung beeinflussen, schien es uns sinnvoll, die Spaltflächen entsprechend vorbehandelter Kristalle zu untersuchen. Als geeignete Modellsubstanz wählten wir wieder den NaCl-Kristall. Am NaCl-Kristall gelingt durch das Verfahren der Golddekoration nach BASSETT [4] die elektronenmikroskopische Abbildung von Oberflächenstrukturen mit Stufenhöhen bis herab zu einem Netzebenenabstand. Schraubenversetzungen oder durch Spannungen vor der Rißfront erzeugte Versetzungsringe hinterlassen z. B. auch, wenn sie vom Spaltriß durchschnitten werden, Spaltstufen, die entsprechend den im NaCl möglichen BURGERS-Vektoren $a/2$ oder a (a = Gitterkonstante) hoch sind.

Die kürzlich von BETHGE u. a. [5] beschriebene „elementare Spaltstruktur“ ist typisch für den von Inhomogenitäten hinreichend freien Kristall. Die „Dichte“ der elementaren Spaltstruktur hängt von der Rißgeschwindigkeit ab. Am speziell mit Inhomogenitäten versehenen Kristall wird in der Umgebung dieser Kristallstörung die Rißausbreitung geändert, und es bietet sich damit die Möglichkeit, den Einfluß auf die Spaltstruktur im überschaubaren Mikrobereich zu untersuchen. Die Inhomogenitäten wurden durch Verfärbung reiner, aus dem Schmelzfluß gezogener Kristalle im Goldchloriddampf erzeugt [6]. Es entstehen dabei einmal im Kristall Goldkolloide, und zum anderen werden auch Hohlräume gebildet; letztere wahrscheinlich durch die Reaktion der umgebenden Chloratmosphäre bei Temperaturen, die größer sind als die Zerfallstemperatur des Goldchlorids [7]. Die Spaltung der Kristalle erfolgte im Hochvakuum durch ein Pendelschlagwerk. Die Aufdampfung des Goldes und der Kohleschicht auf die Spaltfläche wurde unmittelbar nach der Spaltung in der gleichen Apparatur vorgenommen, ohne daß zwischendurch der Rezipient belüftet wurde [5].

[1] Über die hier mitgeteilten Ergebnisse wurde auf dem Kongreß der International Union of Crystallography in Cambridge (14.—24. Augugst 1960) berichtet.

[2] J. J. GILMAN, C. KNUDSEN u. W. P. WALSH, J. Appl. Phys. **29**, 601 [1958]. — J. J. GILMAN, Trans. Amer. Inst. Min. Metall. Engrs. **209**, 449 [1957].

[3] Eine geeignete Übersicht vermittelt der Konferenzbericht „Fracture“, Herausgeber: B. L. AVERBACH u. a., Wiley & Sons, New York 1959.

[4] G. A. BASSET, Phil. Mag. **3**, 1042 [1958].

[5] H. BETHGE, G. KÄSTNER u. M. KROHN, Z. Naturforschg. **16 a**, 321 [1961].

[6] D. J. BARBER, K. B. HARVEY u. J. W. MITCHELL, Phil. Mag. **2**, 704 [1957].

[7] L.W. BARR u. J. A. MORRISON, J. Appl. Phys. **31**, 617 [1960].